



**Natália da Fonseca
Nogueira**

**Modelos para localização e conexão de facilidades
baseados em fluxos**



**Natália da Fonseca
Nogueira**

**Modelos para localização e conexão de facilidades
baseados em fluxos**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Doutora Cristina Requejo Agra, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus pais.

o júri

Presidente

Professora Doutora Paula Cristina Roque da Silva Rama,
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

vogais

Professora Doutora Maria Margarida de Andrade Corte Real Goncalves,
Professora Auxiliar, Universidade Católica Portuguesa Porto

Professora Doutora Maria Cristina Saraiva Requejo Agra,
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos

Antes de mais, agradeço aos meus pais por me terem dado a oportunidade de concretizar esta satisfação pessoal.

Agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Maria Cristina Saraiva Requejo Agra, pela sua disponibilidade e apoio incansável que sempre demonstrou ao longo da elaboração desta dissertação.

Agradeço a todos aqueles que, em momentos menos bons, me deram força para continuar.

palavras-chave

Formulações, Localização de Facilidades, Conexão de Facilidades, Árvore de Steiner, Restrições de fluxo multiproduto, Restrições de Miller-Tucker-Zemlin.

resumo

Com o presente trabalho apresentamos alguns modelos para o problema de localização e conexão de facilidades. O problema de localização de facilidades consiste em encontrar os melhores locais de instalação de determinados serviços de modo a satisfazer o pedido de determinados clientes. O problema da conexão das facilidades determina a melhor forma de ligar as facilidades entre si. Neste trabalho consideramos os dois problemas em simultâneo. Utilizamos vários modelos, os modelos de fluxo multiproduto com uma mercadoria por cliente, fluxo multiproduto com uma mercadoria por facilidade e ainda modelos com base nas restrições de eliminação de sub-ciclos de Miller-Tucker-Zemlin. Testamos computacionalmente programas desenvolvidos para cada um dos modelos referidos usando o software Xpress e, finalmente, apresentamos as nossas conclusões relativamente aos resultados obtidos nos vários modelos utilizados tendo em conta o tempo computacional e a qualidade da solução obtida através das relaxações lineares dos modelos apresentados.

keywords

Formulations, Location of Facilities, Connection of Facilities, Steiner Tree, Multicommodity flow constraints, Miller-Tucker-Zemlin constraints.

abstract

In this work we present models for the facility location problem and the facility connection problem. The facility location problem is to find the best places to install specific services to meet the request of certain customers. The problem of connecting the facilities is to determine the best way to connect the facilities between them. In this work we consider both problems simultaneously.

We use several models, multicommodity flow models with a commodity per customer, multicommodity flow models with a commodity per facility and also models based on the well know Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints. We tested computationally programs developed for each of these models using the software Xpress and finally, we present our findings regarding the results obtained in the various models used considering the computation time used by the programs and the quality of the linear relaxation solutions of the models.

Conteúdo

Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Breves noções genéricas	4
Capítulo 3 - Problemas de localização	8
Formulação PLC - problema de localização com capacidades	10
Formulação PL - problema de localização sem capacidades	11
Formulação P-M – problema das p -medianas	13
Formulação P-C – problema dos p -centros	15
Capítulo 4 - Problemas de conexão	17
Formulação CORTE	19
Formulação SUB	20
Formulação FLUXO	21
Formulação MTZ	22
Capítulo 5 - Problema de localização e conexão de facilidades	24
Formulação FMF - Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade	27
Formulação FMC - Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente	29
Formulação MTZF - Restrições de Miller-Tucker-Zemlin para as facilidades	32
Formulação MTZC - Restrições de Miller-Tucker-Zemlin para os clientes	34
Capítulo 6 - Resultados computacionais	36
Capítulo 7 - Conclusões	46

Capítulo 1 - Introdução

O conceito de “Investigação Operacional” (em inglês “Operational Research” ou “Operations Research”) surgiu na segunda guerra mundial com a necessidade de analisar alguns problemas militares. O estudo e aplicação de métodos matemáticos e científicos estavam relacionados com o desenvolvimento, operação e localização de radares, planeamento de ataques aéreos, lançamento de bombas contra submarinos, gestão e controlo de navios de apoio, defesa das comunidades europeias contra ataques aéreos inimigos, etc. Após a Segunda Guerra Mundial, muitos dos especialistas que estiveram envolvidos no planeamento das operações militares e, devido ao sucesso dessas operações, deram continuidade às pesquisas, agora visando também operações não militares, numa perspetiva empresarial. Hoje, o termo “Investigação Operacional” significa *“a aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, que busca determinar como melhor planejar e operar sistemas em situações que requerem alocações eficientes de recursos escassos”* [1]. Problemas clássicos de investigação operacional são o problema do caminho mínimo, o problema da mochila, o problema de transportes, o problema de localização de facilidades, problema do caixeiro viajante, problema de fluxo em redes, problema de rotas, etc.

Nesta tese vamos abordar, conjuntamente, o problema de localização e conexão de facilidades. Este é um problema que envolve dois problemas, o da localização das facilidades e o da conexão das facilidades.

O problema de localização de facilidades consiste em encontrar os melhores locais de instalação de determinadas facilidades/serviços/origens de modo a satisfazer o pedido de determinados clientes/destinos. O problema da conexão das facilidades resume-se em determinar a melhor forma de ligar as facilidades entre si.

A ideia associada a este problema consiste em, de entre um determinado conjunto de possíveis localizações dos serviços/facilidades, escolher algumas que sejam instaladas e que sejam capazes de satisfazer os clientes e, além disso, determinar a forma de ligar entre si essas facilidades selecionadas. Os clientes serão depois ligados à facilidade que os

servirá. O objectivo é o de minimizar o custo da ligação das facilidades entre si, o custo de serviço dos clientes pela facilidade seleccionada e o custo de instalação das facilidades.

Neste trabalho vamos apresentar alguns modelos para o problema de localização e conexão de facilidades. Os modelos que apresentamos são: modelos com restrições de fluxo e modelos com restrições de eliminação de subcircuitos de Miller-Tucker-Zemlin. Para ambos os casos, consideramos modelos que levam uma comodidade de um nó raiz até às facilidades ou alternativamente até aos clientes. Ficamos assim com quatro modelos: modelo de fluxo multiproduto com uma mercadoria por facilidade, modelo de Miller-Tucker-Zemlin para facilidades, modelo de fluxo multiproduto com uma mercadoria por cliente e modelo de Miller-Tucker-Zemlin para clientes. Para todos os modelos consideramos as suas respectivas relaxações lineares. Para cada um dos modelos foram implementados programas em Xpress que foram usados para testar, em exemplos pequenos com dados gerados aleatoriamente, a qualidade da solução obtida e o tempo de resolução computacional.

No Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos básicos utilizados no contexto dos capítulos seguintes. Por exemplo, é dado o conceito de grafo, uma vez que este é usado na caracterização do problema de localização e do problema de conexão.

No Capítulo 3 descrevemos o problema de localização cujo objectivo é o de escolher os locais onde instalar as facilidades. Fazemos uma descrição dos modelos de localização com capacidades e sem capacidades, bem como os modelos para o problema das p -medianas e para o problema dos p -centros.

No Capítulo 4 descrevemos o problema de conexão de facilidades cujo objectivo é o de determinar uma forma de ligar entre si as facilidades instaladas. Essa ligação pode ser feita de várias formas. Uma delas consiste em utilizar a estrutura de árvore. Existem vários modelos que nos permitem obter uma estrutura em árvore. Neste trabalho usamos a estrutura de árvore para estabelecer a ligação entre as facilidades aplicando os modelos de cortes e de eliminação de subcircuitos, modelos de fluxos e os modelos baseados em restrições de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ).

No Capítulo 5 descrevemos modelos para o problema de localização e conexão de facilidades. Aqui os problemas são considerados em simultâneo e apresentamos modelos de fluxo multiproduto e modelos baseados nas restrições de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ).

No Capítulo 6 apresentamos alguns resultados computacionais. Os resultados obtidos com a aplicação dos vários modelos descritos no Capítulo 5 a instâncias do problema com 50, 80, 100, 120 e 150 nodos. No final fazemos uma comparação em termos dos valores obtidos e tempos computacionais utilizados dos vários modelos utilizados.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos algumas conclusões do trabalho desenvolvido nesta tese.

Capítulo2 - Breves noções genéricas

Neste capítulo, e de forma a que o conteúdo desta tese seja autocontido, começamos por apresentar breves noções de alguns conceitos que utilizamos ao longo da tese.

Muitos problemas de optimização são definidos em grafos, em particular os que descrevemos nesta tese. Por essa razão apresentamos algumas definições sobre grafos que podemos encontrar em Goldbarg e Luna [2].

Grafo

Um grafo é uma estrutura de abstração que representa um conjunto de elementos denominados nós ou vértices e suas relações de interdependência traduzidas por arestas.

Denominando por $V = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de vértices ou nós da estrutura, e por $E = \{\{i, j\}, i, j \in V, i \neq j\}$ o conjunto das arestas que representam ligações existentes entre vértices, um grafo pode ser representado por : $G = (V, E)$.

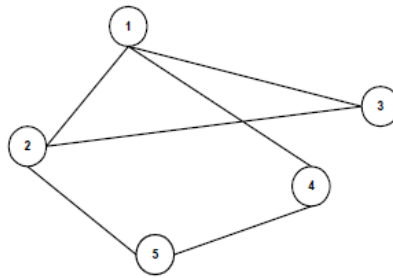


Ilustração 1: Grafo com o conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e com o conjunto de arestas $\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}$.

Um grafo $G = (V, E)$ pode ter valores numéricos (pesos) associados às arestas ou aos nós.

Grafo orientado

Um grafo é dito orientado quando é indicado o sentido das ligações entre os vértices. Nesse caso, as arestas passam a chamar-se arcos.

Denominando também por V o conjunto de vértices do grafo orientado, e por $A = \{(i, j), i, j \in V, i \neq j\}$ o conjunto de ligações existentes em G , um grafo orientado é também representado por $G = (V, A)$.

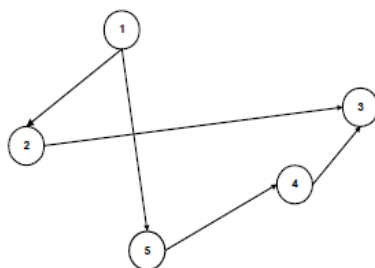


Ilustração 2: Grafo orientado com o conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e conjunto de arcos $\{(1,2), (1,5), (2,3), (4,3), (5,4)\}$.

Subgrafo

Um subgrafo de um grafo G é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices de G e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G .

Caminho e Ciclo

Um caminho é uma sequência de arestas na qual todos os nós/vértices visitados são distintos.

Um ciclo é uma sequência de arestas, não repetidas, que inicia e termina no mesmo vértice.

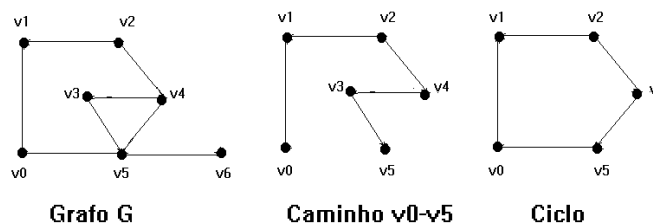


Ilustração 3: Exemplos de um caminho e de um ciclo do grafo G .

Conexidade

Um grafo G é conexo se, para todo o par de vértices, existe pelo menos um caminho entre eles. Se existir pelo menos um par de vértices que não é unido por nenhum caminho diz-se que o grafo é não-conexo, ou desconexo.

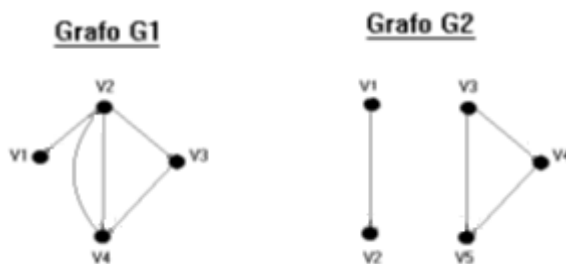


Ilustração 4: Exemplos de um grafo conexo, grafo G1, e de um grafo desconexo, grafo G2.

Árvore

Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.

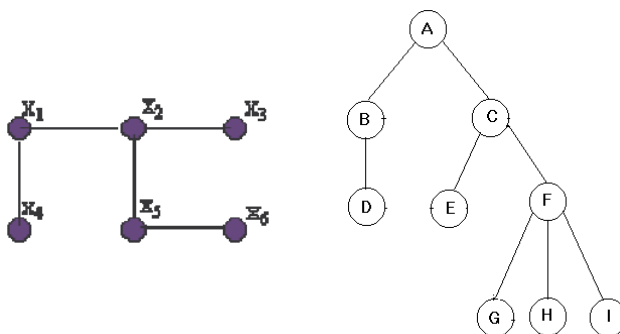


Ilustração 5: Exemplos de árvores.

Arborescência

Uma arborescência é uma árvore definida num grafo orientado, na qual existe um caminho dirigido de um vértice r denominado raiz para cada um dos restantes vértices.

Árvore de Steiner

Dado um grafo $G = (V, A)$ com pesos nas arestas e $W \subseteq V$ um subconjunto de vértices de G , o problema da árvore de Steiner tem como objetivo obter um subgrafo conexo unindo os vértices de W com soma mínima dos pesos das arestas e podendo usar vértices de V que não estão em W , designados de vértices de Steiner. Os vértices usados criam as conexões necessárias para ligar todos os pontos de W com peso total mínimo. Os pontos do subconjunto W são geralmente designados por nodos terminais e os restantes, $i \in V \setminus W$ por nodos de Steiner. Estes apenas são incluídos na solução por forma a garantir a conexidade da solução e/ou redução do custo total da árvore. Os nodos terminais podem ser vistos, no contexto de redes de computadores, como sendo servidores que obrigatoriamente têm de estar presentes na rede para que haja fornecimento de serviço. Os nodos de Steiner podem ser vistos como pontos de ligação da rede.

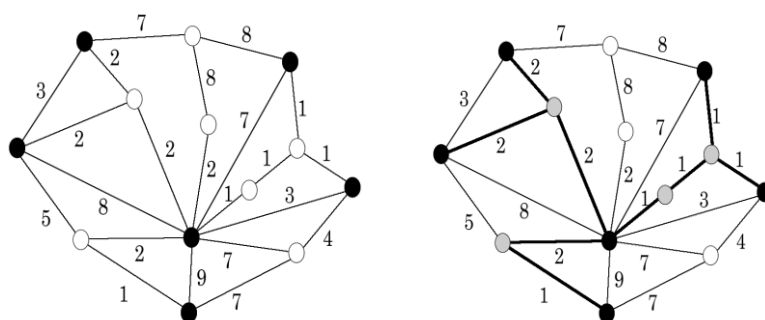


Ilustração 6: Árvore de Steiner onde

V é o conjunto dos pontos representado por \bullet e \circ , W é o conjunto dos pontos \bullet e os pontos de Steiner são representados por \odot .

Capítulo3 - Problemas de localização

Num problema de localização [5] pretendemos determinar a melhor forma de localizar um conjunto de facilidades (também designadas por origens ou serviços) de modo a serem capazes de servir um conjunto de destinos ou clientes fixos cuja localização é conhecida. Trata-se de decidir qual o número e localização dos serviços (origens ou facilidades) que servem os clientes (destinos) da melhor forma possível. É ainda necessário determinar a afetação dos destinos às origens e, nalguns casos, a dimensão ou capacidade de cada serviço.

O problema de localização pode ser visto como sendo a resposta a um conjunto de pedidos ou clientes espacialmente distribuídos numa área geográfica que requerem um produto ou serviço específico. Os pedidos devem ser satisfeitos por um ou mais serviços ou facilidades. A determinação da quantidade e da localização dos melhores pontos onde instalar as facilidades, de forma a satisfazer um conjunto de clientes, tem em conta as suas exigências e as restrições geográficas. O objectivo é determinar a melhor localização para a instalação de facilidades a fim de otimizar uma função de custo (tempo, distância, valor financeiro...), ou então determinar o número de facilidades necessárias para que uma função de custo seja otimizada.

Este problema envolve três elementos essenciais. As facilidades, que são o conjunto de serviços que pretendemos localizar para prestarem um serviço. As localizações, todos os pontos possíveis para a instalação das facilidades. Os clientes, que representam os elementos que são servidos pelas facilidades.

Os problemas de localização são de diversos tipos e podem ter inúmeras especificidades [5]. Entre outros, temos problemas de localização de facilidades com capacidades ou sem capacidades, o problema das p -medianas e dos p -centros.

Os problemas de localização são considerados sem capacidades no caso de não haver limite na capacidade de resposta à procura, são considerados com capacidades no caso da facilidade ter um limite máximo de capacidade para atender os clientes, são considerados p -medianas quando o conjunto de clientes a servir coincide com o conjunto das possíveis

localizações de facilidades e são considerados p-centros quando a distância máxima entre os clientes e as facilidades tem de ser minimizada.

Para a definição de um problema de localização consideramos um grafo $G = (V, A)$ com pesos/custos associados aos arcos, o conjunto de vértices correspondendo a um conjunto de possíveis localizações para facilidades e um conjunto de clientes. Pretendemos instalar um conjunto de facilidades e associar uma facilidade a cada cliente. O objectivo do problema é o de minimizar o custo total, incluindo o custo de instalação das facilidades e o custo para ligar clientes às facilidades.

Consideramos uma partição disjunta $\{C, F\}$ do conjunto de vértices V com $|V| = n + m$, e consideramos também os seguintes conjuntos e dados:

C : $C \subset V$ o subconjunto de n clientes cuja localização é previamente conhecida;

F : $F \subset V$, o subconjunto de m elementos de V que representa as possíveis localizações de facilidades;

f_i : o custo fixo de instalação de uma facilidade no local i ;

c_{ij} : o custo de atender o pedido do cliente j a partir de uma facilidade localizada em i .

Para formularmos os problemas de localização vamos precisar das seguintes variáveis de decisão.

As variáveis binárias

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } j \text{ é servido pela facilidade localizada em } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \forall i \in F, j \in C$$

e as variáveis binárias

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se é instalada uma facilidade em } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in F$$

O problema de localização de facilidades com capacidades envolve a localização de facilidades e a atribuição de clientes a facilidades, respeitando a capacidade associada a cada facilidade, de modo a minimizar o custo de instalação da facilidade e o custo de atendimento das procuras ou necessidades dos clientes.

Para descrever este problema consideramos ainda as seguintes quantidades:

Q_i : capacidade máxima da facilidade que pode ser instalada no local i ;

q_i : quantidade necessária em cada destino i .

O problema de localização com capacidades (PLC) pode ser formulado em programação linear inteira da seguinte forma:

Formulação PLC - problema de localização com capacidades

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{PLC1})$$

$$\sum_{j \in C} q_j x_{ij} \leq Q_i z_i \quad \forall i \in F \quad (\text{PLC2})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, j \in C \quad (\text{PLC3})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{PLC4})$$

As restrições (PLC1) garantem que cada cliente é atendido por uma facilidade. As restrições (PLC2) asseguram que se uma instalação é aberta, então a sua capacidade é satisfeita, i.e., a quantidade enviada dessa facilidade para os clientes é inferior ou igual à sua capacidade. As restantes restrições (PLC3) e (PLC4) são as restrições de integralidade nas variáveis.

Notamos que quando as restrições de capacidade não são activas $Q_i \geq \sum_{j \in C} q_j$, qualquer serviço pode abastecer todos os clientes, pelo que obtemos um modelo de localização sem capacidades.

O problema de localização de facilidades sem capacidades difere do anterior por não existir uma capacidade máxima associada a cada facilidade. O problema envolve a localização das facilidades bem como a ligação de clientes a facilidades, de modo a minimizar o custo fixo de instalação das facilidades e o custo de atendimento às procuras/necessidades dos clientes.

O problema de localização de facilidades sem capacidades pode ser formulado em programação linear inteira da seguinte forma:

Formulação PL - problema de localização sem capacidades

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{PL1})$$

$$x_{ij} \leq z_i \quad \forall i \in F \quad \forall j \in C \quad (\text{PL2})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, j \in C \quad (\text{PL3})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{PL4})$$

A única restrição que difere do modelo anterior é a restrição (PL2) que assegura que um cliente só pode ser atendido por uma facilidade se essa for instalada. As restrições (PL1) garantem que cada cliente é atendido por uma facilidade. As restantes restrições (PL3) e (PL4) são as restrições de integralidade nas variáveis.

Nestes dois modelos, PLC e PL, exigimos que cada cliente seja afeto na totalidade a um só serviço. Se tal não for pretendido, podemos admitir a afectação parcial de um cliente a vários serviços e nesse caso $0 \leq x_{ij} \leq 1 \forall i \in F, j \in C$ e os modelos passam a ser de programação linear inteira mista.

Quando $C = F$, i.e. o conjunto dos clientes a servir coincide com o conjunto das possíveis localizações para as facilidades temos o chamado problema das p -medianas.

Este problema pode ser aplicado, por exemplo, na determinação da localização de escolas numa determinada cidade. As escolas devem ser localizadas junto das comunidades onde residem os alunos. Suponhamos que se pretende instalar p escolas num determinado número (superior a p) de possíveis localizações em comunidades onde cada escola tem um determinado número de alunos agregado e cada aluno apenas frequenta uma escola. A determinação do local deve ser efetuada de modo a minimizar a soma das distâncias entre a escola e a comunidade de residência de cada aluno.

Para definirmos o problema das p -mediana, considerem-se os parâmetros atrás definidos e uma constante p , tal que $p \leq m$, que representa o número de facilidades a instalar (medianas). De uma forma mais genérica, o problema das p -medianas consiste em determinar quais as p facilidades a instalar com o objectivo de minimizar a soma dos custos de ligar cada cliente à facilidade aberta mais próxima.

O problema das p -medianas pode ser formulado em programação linear inteira da seguinte forma:

Formulação P-M – problema das p -medianas

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. a. } \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{P-M1})$$

$$x_{ij} \leq z_i \quad \forall i \in F \quad \forall j \in C \quad (\text{P-M2})$$

$$\sum_{i \in F} z_i = p \quad (\text{P-M3})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, j \in C \quad (\text{P-M4})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{P-M5})$$

Nesta formulação, as restrições (P-M1) garantem que cada cliente é atendido por uma facilidade, isto é, para cada cliente existe apenas uma ligação a uma das facilidades. As restrições (P-M2) asseguram que cada cliente só pode ser atribuído a uma facilidade se essa facilidade é instalada. A restrição (P-M3) obriga que sejam instaladas/abertas p facilidades. Finalmente, as restrições (P-M4) e (PM5) são as restrições de integralidade nas variáveis. Nesta formulação pode ainda incluir-se os custos de instalação das facilidades, ficando a função objectivo da seguinte forma: $\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$.

O problema dos p -centros difere significativamente dos problemas de localização anteriores no que diz respeito ao critério utilizado para avaliar a qualidade de uma possível solução. Enquanto os problemas anteriores são conhecidos como problemas de *minisum* nos quais queremos minimizar a soma dos custos, o problema dos p -centros é um problema de *minimax*. Os problemas de *minimax* tem como objectivo: abrir p facilidades e atribuir cada cliente a exactamente uma delas tal que a máxima distância entre cada facilidade aberta e o cliente que lhe é atribuído seja mínima. Cada facilidade pode servir um diferente número de clientes. Uma localização ótima de apenas uma facilidade é designado de 1 -centro, ou apenas centro, e quando $p > 1$ facilidades são instaladas, a localização ótima é constituída por um conjunto de p -centros.

O objectivo deste problema é o de minimizar a distância máxima de um cliente a uma facilidade, pelo que a sua função objectivo tem a seguinte forma:

$$\min_{j \in C} \max_{i \in F} \sum c_{ij} x_{ij}$$

Considerando as variáveis de decisão já definidas e a seguinte variável adicional:

r : que indica a distância máxima entre um cliente e a facilidade que lhe é atribuída

Esta variável adicional permite reescrever a função objectivo tornando-a linear e passando o problema da maximização da distância para o conjunto de restrições do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
& \min r \\
\text{s. a.} \quad & r \geq \sum_{i \in F} c_{ij} x_{ij} \quad \forall j \in C
\end{aligned}$$

O problema dos p -centros pode ser formulado em programação linear inteira da seguinte forma:

Formulação P-C – problema dos p -centros

$$\begin{aligned}
& \min r \\
\text{s. a.} \quad & r \geq \sum_{i \in F} c_{ij} x_{ij} \quad \forall j \in C \quad (\text{P-C1})
\end{aligned}$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{P-C2})$$

$$x_{ij} \leq z_i \quad \forall i \in F \quad \forall j \in C \quad (\text{P-C3})$$

$$\sum_{i \in F} z_i = p \quad (\text{P-C4})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, j \in C \quad (\text{P-C5})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{P-C6})$$

Na restrição (P-C1) o r representa um limite superior para a distância entre cada cliente e a facilidade que o serve. As restrições (P-C2) garantem que cada cliente é atendido por uma facilidade, isto é, para cada cliente existe apenas uma ligação a uma das facilidades. As restrições (P-C3) asseguram que cada cliente só pode ser atribuído a uma facilidade se essa facilidade é instalada. As restrições (P-C4) obrigam que sejam instaladas/abertas p facilidades. Finalmente, as restrições (P-C5) e (P-C6) são as restrições de integralidade das variáveis. Nesta formulação pode ainda incluir-se os custos de instalação das facilidades, passando o problema da maximização da distância para o conjunto de restrições do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & \min r \\ & r \geq \sum_{i \in F} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i \quad \forall j \in C \end{aligned}$$

Este tipo de problemas ocorre frequentemente em formulações de problemas de decisão de localização de serviços de emergência tal como a polícia, bombeiros e serviços de ambulâncias. Um critério comum para a eficácia destes serviços é que cada cliente possa ser atendido pela facilidade mais próxima tendo como limite máximo uma dada distância (tempo ou custo) de referência.

Capítulo 4 - Problemas de conexão

Neste capítulo vamos apresentar alguns modelos para o problema de conexão. A ligação entre os vértices de um grafo pode ser realizada de diversas formas. Podemos efectuar a ligação em árvore, em estrela, através de um caminho (sequencial), em ciclo, como um emparelhamento, ou usando uma qualquer outra estrutura que una as facilidades entre si. Existe com frequência, a necessidade de uma boa análise do problema para decidir a melhor estrutura a usar para ligar os vértices de um grafo e portanto, escolher a topologia mais adequada ao problema [2]. A estrutura de “árvore” é utilizada quando se pretende efectuar uma ligação usando o menor número de arestas para ligar os vértices. A estrutura em estrela é utilizada quando se pretende uma ligação direta a um centro. Uma das estruturas de representação de ligação de extrema importância é a de “caminho”. Esta topologia é usada quando se pretende representar uma trajectória. A estrutura de ciclo é usada quando há que efectuar um percurso através dos vértices e a necessidade de retorno ao ponto de partida. Outra estrutura igualmente importante é o de “emparelhamento (*matching*)”. Este é aplicado quando o problema de conexão envolve pequenos agrupamentos.

A estrutura escolhida para a conexão pode de alguma forma considerar outras propriedades que possam ser importantes na ligação dos vértices entre si. Nesta tese vamos efectuar a ligação das facilidades usando a estrutura de árvore, pois apenas pretendemos que a sua ligação seja efectuada usando o menor número de elementos de ligação (arestas). Pretendemos portanto determinar uma árvore de suporte de custo mínimo. Por abuso de linguagem, neste trabalho, sempre que nos referimos a uma árvore, estamos a considerar que se trata de uma arborescência, uma vez que o grafo é orientado.

Para o problema de conexão que vamos considerar, que é o problema da árvore de suporte de custo mínimo, apresentamos duas variantes de formulações, formulações naturais e formulações estendidas. As formulações naturais, envolvem apenas variáveis ligadas aos arcos. As formulações estendidas, para além das variáveis naturais, usam outras variáveis que podem estar ou não associadas aos arcos. Nas formulações naturais apresentamos a formulação de eliminação de cortes e a formulação de eliminação de subcircuitos [4]. Nas

formulações estendidas descrevemos a formulação de multifluxo e a formulação com restrições de Miller – Tucker – Zemlin (MTZ).

Para o problema de conexão de vértices consideramos um grafo $G = (V, A)$, $|V| = n$, custos associados aos arcos e seleccionemos um qualquer nodo de V como raíz, r :

c_{ij} : o custo de ligar o vertice i ao vertice j .

Para formularmos os problemas de conexão vamos precisar do seguinte conjunto de variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ está na solução} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in A$$

Para descrever uma primeira solução para o problema vamos usar a seguinte definição de árvore: uma árvore é um grafo conexo com $n-1$ arestas. Considerando $T \subseteq V$ para cada par de vértices $i \in T, j \in \bar{T}$ deve existir uma ligação (caminho) entre eles. Para garantir que a solução seja conexa, impõe-se que deva existir pelo menos uma ligação entre quaisquer dois pares de vértices, $\sum_{i \in T, j \in \bar{T}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall T \subseteq V, |T| \geq 2$. Estas restrições são designadas por restrições de corte, por garantirem a inclusão de pelo menos um arco no corte entre os dois conjuntos T e \bar{T} . Tem-se a seguinte formulação em programação linear inteira:

Formulação CORTE

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. a. } \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \quad j \in V \setminus \{r\} \quad (\text{COR1})$$

$$\sum_{i \in T, j \in \bar{T}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall T \subseteq V, \quad |T| \geq 2 \quad (\text{COR2})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{COR3})$$

A restrição (COR1), é uma restrição de cardinalidade que implica que escolhemos exactamente $n-1$ arcos para a solução. A restrição (COR2) é a restrição de conectividade que obriga a que a solução do problema seja conexa obrigando que haja ligação entre vértices de conjuntos disjuntos. Finalmente, (COR3) é a restrição de integralidade nas variáveis.

Vamos agora usar a seguinte definição de árvore para descrever uma outra formulação para o problema: uma árvore é um grafo sem ciclos com $n-1$ arestas. Se considerarmos um subcircuito que envolva um subconjunto de nodos $T \subseteq V$, então a soma de todas as ligações desse subcircuito é igual a $|T|$. Para evitar a formação desse subcircuito, impõe-se que a referida soma seja inferior a $|T|$. Estas desigualdades são conhecidas por restrições de eliminação de subcircuitos quando incluídas em formulações de problemas de optimização.

Substituindo as restrições (COR2) da formulação de corte pelas restrições $\sum_{i,j \in T} x_{ij} \leq |T| - 1 \quad \forall T \subseteq V, |T| \geq 1$, tem-se então outra forma de reescrever o problema, a formulação de subcircuitos:

Formulação SUB

$$\begin{aligned} & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. a. } & \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \quad j \in V \setminus \{r\} \end{aligned} \quad (\text{SUB1})$$

$$\sum_{i,j \in T} x_{ij} \leq |T| - 1 \quad \forall T \subseteq V, \quad |T| \geq 1 \quad (\text{SUB2})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{SUB3})$$

Nesta formulação a restrição (SUB1) tem o mesmo objectivo do que a restrição (COR1) e obriga a que exactamente $n-1$ arcos sejam seleccionados para a solução. A restrição (SUB2), impede a formação de subcircuitos no conjunto de arestas T , $\forall T \subseteq V$. A restrição (SUB3) é a restrição de integralidade nas variáveis.

A desvantagem associada à utilização das restrições de corte ou restrições de eliminação de subcircuitos, deve-se ao número exagerado de restrições que ambos os conjuntos possuem. Para contornar este problema vamos usar conjuntos adicionais de variáveis e que nos leva à obtenção de formulações estendidas.

Uma forma de obter formulações estendidas para o problema da árvore de suporte de custo mínimo é defini-lo como um problema de fluxo. O problema de fluxos numa rede consiste no envio de um fluxo (uma comodidade ou produto) de um ou vários nós de origem para um ou vários nós de destino. No problema de optimização de fluxos numa rede pretendemos também efectuar o envio de uma comodidade mas agora otimizando algum critério. Nos problemas de fluxos em que várias comodidades partilham os mesmos recursos de uma rede são denominados de problemas de fluxo multi-produto (Multi-

Commodity Flow). Assim, o fluxo correspondente a cada par origem-destino é visualizado como uma comodidade/produto diferente. No caso do problema da árvore de suporte de custo mínimo, após seleccionado um nó de V , o nó raíz, por exemplo o nodo 1, cada um dos restantes nós do conjunto V recebe uma unidade de fluxo enviada pelo nó raíz.

Para modelar o problema de fluxos, vamos usar as seguintes variáveis binárias:

$$g_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o fluxo com destino a } k \text{ passa pelo arco } (i,j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall (i,j) \in A \quad \forall k \in V \setminus \{r\}$$

Estas variáveis indicam que uma unidade de fluxo é enviada pelo nodo 1, percorrendo o arco (i,j) e com destino ao nodo K .

Uma formulação para o problema de conexão pode ser escrita da seguinte forma:

Formulação FLUXO

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

(FLU1)

$$\text{s. a.} \quad \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \quad j \in V \setminus \{r\}$$

$$\sum_{j \in S, j \neq i, j \neq k} g_{ji}^k - \sum_{j \in V, j \neq i, j \neq r} g_{ij}^k = \begin{cases} 1 & i = k \\ -1 & i = r \\ 0 & i \neq k, r \end{cases} \quad \forall i \in V \quad \forall k \in V \setminus \{r\} \quad (\text{FLU2})$$

$$0 \leq g_{ij}^k \leq x_{ij} \quad \forall (i,j) \in A, \quad i \neq k \quad \forall k \in V \setminus \{r\} \quad (\text{FLU3})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{FLU4})$$

$$g_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad \forall k \in V \setminus \{r\} \quad (\text{FLU5})$$

A restrição (FLU1), é uma restrição de cardinalidade que implica que escolhemos exactamente $n-1$ arcos. As restrições (FLU2) são as restrições de conservação de fluxo. Asseguram a existência de um caminho a partir do nodo raiz r para cada vértice e para os restantes nodos garantem que a quantidade de fluxo que entra é igual à quantidade de fluxo que sai desse mesmo nodo. As restrições (FLU3) asseguram o envio do fluxo para o vértice k passando pelo arco $(i, j) \in A$, se esse o arco estiver na solução. As restrições (FLU4) e (FLU5) são restrições de integralidade nas variáveis.

Pode-se obter outra formulação estendida para o problema da árvore de suporte de custo mínimo através da substituição das restrições de conservação de fluxo pelas restrições de eliminação de subcircuitos de Miller-Tucker-Zemlin. A formulação em programação linear inteira publicada em 1960, por Miller, Tucker e Zemlin e que denominaremos MTZ foi inicialmente utilizado em problemas de caixeiro-viajante (PCV) sendo posteriormente adaptado ao problema de árvore de suporte de custo mínimo.

Para definirmos a nova formulação, vamos usar o seguinte conjunto de variáveis:

u_i : indica o nível da árvore na qual o nó i é visitado no decorrer do percurso, desde a raiz até ao nodo i .

A formulação para o problema pode ser escrita em programação linear inteira mista da seguinte forma:

Formulação MTZ

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. a.} \quad & \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \quad j \in V \setminus \{r\} \end{aligned} \tag{MTZ1}$$

$$x_{ij} + u_i - u_j \leq (|V| - 1) * (1 - x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A, \quad i \neq j \text{ e } j \neq r \quad (\text{MTZ2})$$

$$u_r = 0 \quad (\text{MTZ3})$$

$$u_i \leq |V| - 1 \quad \forall i \in V \quad (\text{MTZ4})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{MTZ5})$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in V \quad (\text{MTZ6})$$

As restrições de MTZ fazem com que haja uma sequência na visita dos nodos, i.e quando é estabelecida a ligação de i a j , o nó j só é visitado depois do nó i , estabelecendo assim a sequência dos nós a serem visitados (MTZ2). Essa sequência é realizada a partir do nodo raiz r (MTZ3). A sequência nunca será superior ao número de nodos existentes (MTZ4). A restrição (MTZ1), é uma restrição de cardinalidade que implica que escolhemos exactamente $n-1$ arcos. Finalmente, as restrições (MTZ5) e (MTZ6) são as restrições de integralidade nas variáveis.

Se considerarmos um circuito $\mathcal{C} = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, i_0)\}$ e adicionarmos as restrições (MTZ2) para esse circuito em que $x_{ij} = 1$ para $(i, j) \in \mathcal{C}$, obtemos $\sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} x_{ij} \leq 0$. Por outro lado, para qualquer árvore admissível é possível encontrar valores para as variáveis $u_i \ i \in V$ que satisfazem as restrições (MTZ2), (MTZ3) e (MTZ4).

Capítulo 5 - Problema de localização e conexão de facilidades

Neste capítulo descrevemos diversos modelos para o problema de localização e conexão de facilidades. O problema de localização consiste em decidir onde localizar e instalar facilidades. Por vezes há ainda a necessidade de essas facilidades estarem ligadas entre si, pelo que é importante que se decida como efectuar a sua conexão. Nos capítulos anteriores descrevemos modelos já conhecidos que lidam com cada um dos problemas envolvidos independentemente. Neste capítulo vamos mostrar como lidar com os dois problemas em simultâneo. Para isso vamos considerar o problema de localização sem capacidades e vamos efectuar a conexão das facilidades através de uma árvore, usando o menor número de ligações. Dependendo do modelo usado para lidar com o problema da conexão em árvore obteremos diversos modelos para o problema da localização e conexão em árvore de facilidades.

Para definirmos o problema de localização e conexão de facilidades consideremos um grafo $G = (V, A)$ com custos associados às arestas, um conjunto de possíveis localizações para as facilidades, os respectivos custos de instalação e um conjunto de clientes [6]. Pretendemos abrir um conjunto de facilidades e associar uma facilidade a cada cliente. Ao mesmo tempo, desejamos conectar as facilidades abertas através de uma árvore. O objectivo do problema é o de minimizar o custo total, incluindo o custo de instalação das facilidades, o custo para ligar clientes às facilidades e os custos de conectar as facilidades abertas através de uma árvore. Procuramos um subconjunto de facilidades abertas tal que:

- Cada cliente é atribuído à facilidade aberta mais próxima;
- Todas as facilidades abertas ficam ligadas através de uma árvore de Steiner;
- A soma dos custos de atribuição, abertura e árvore de Steiner é minimizada.

Para melhor caracterizar o problema consideremos uma partição disjunta $\{S, C\}$ de V com $|V| = |S| + |C|$, e os seguintes conjuntos e dados:

C : $C \subset V$ o subconjunto de n clientes cuja localização é previamente conhecida;

S : $S \subset V$ o conjunto dos restantes vértices é o conjunto de possíveis nós da árvore de Steiner, e constituem o conjunto de nós de Steiner que só são incluídos na solução se forem necessários para melhorar o seu valor;

F : $F \subset S$ um subconjunto de m elementos de S que representa as possíveis localizações de facilidades;

c_{ij} : custos nos arcos $(i, j) \in A$, que são os custos de ligar o vértice i ao vértice j ;

f_i : custo fixo de instalação de uma facilidade no local i ;

Para modelar o problema da árvore é necessário seleccionar um nodo raíz:

r : é o nodo raiz $r \in F$.

Considerando o seguinte conjunto de variáveis binárias que estão relacionadas com a descrição da solução:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ está na solução} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in A$$

E as variáveis binárias que estão relacionadas com a selecção da localização das facilidades:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se a facilidade } i \text{ é instalada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall i \in F$$

O objetivo é minimizar o custo total da solução. Isto é,

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

Onde $\sum_{i,j \in A} c_{ij} x_{ij}$ representa o custo da arborescência de Steiner e o custo de ligar clientes às instalações/facilidades e $\sum_{i \in F} z_i f_i$ representa o custo de abertura de facilidades.

Falta agora incluir restrições de localização de facilidades e restrições que liguem entre si as facilidades abertas através de uma árvore de Steiner.

Dependendo de como lidamos com a forma que as restrições de ligação são efetuados, podemos ter diversas formulações para o problema. Numas formulações usamos as restrições de fluxo e noutras formulações usamos as restrições de MTZ.

5.1. Modelos de Fluxo multiprodutos

Nesta primeira abordagem vamos usar modelos de fluxo para o problema da conexão [3]. Consideramos que o fluxo parte de um nodo inicial designado de raiz, para os clientes ou, em alternativa, parte da raiz para as facilidades abertas/instaladas. Neste último caso teremos de incluir restrições adicionais que assegurem que os clientes sejam atribuídos a uma facilidade aberta. Nesta primeira formulação vamos usar restrições de multifluxo de tal forma que será considerado um caminho/fluxo específico para cada facilidade aberta ou cliente.

Fluxo multiproduto com uma mercadoria por facilidade

Para descrevermos o modelo de fluxo multiproduto com uma mercadoria por facilidade vamos considerar adicionalmente as variáveis binárias que estão relacionadas com o fluxo da solução:

$$g_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o fluxo com destino a } k \text{ passa pelo arco } (i,j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \forall (i,j) \in A \quad \forall k \in F \setminus \{r\}$$

O problema pode ser formulado em programação linear inteira da seguinte forma:

Formulação FME - Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

$$s. a. \sum_{j \in S, j \neq i, j \neq k} g_{ji}^k - \sum_{j \in S, j \neq i, j \neq r} g_{ij}^k = \begin{cases} z_k & i = k \\ -z_k & i = r \\ 0 & i \neq k, r \end{cases} \quad \forall i \in S \quad \forall k \in F \setminus \{r\} \quad (\text{FME1})$$

$$0 \leq g_{ij}^k \leq x_{ij} \quad \forall i, j \in S \text{ tal que } i \neq j, i \neq k, j \neq r, \quad \forall k \in F \setminus \{r\} \quad (\text{FME2})$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{FME3})$$

$$\sum_{i \in S, i \neq j} x_{ij} = z_j \quad \forall j \in F \setminus \{r\} \quad (\text{FME4})$$

$$x_{ij} \leq z_i \quad \forall j \in C \quad \forall i \in F \quad (\text{FME5})$$

$$z_r = 1 \quad (\text{FME6})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{FME7})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{FME8})$$

$$g_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in S \quad \forall k \in F \setminus \{r\} \quad (\text{FME9})$$

As restrições (FMF1) são as restrições de conservação de fluxo. Asseguram a existência de um caminho a partir do nodo raiz r para cada facilidade aberta e para os restantes nodos garantem que a quantidade de fluxo que entra é igual à quantidade de fluxo que sai desse mesmo nodo. As restrições (FMF2) asseguram o envio do fluxo para o vértice k pelo arco $(i, j) \in A$, se esse arco estiver na solução. As restrições (FMF3) asseguram que cada cliente é atribuído a uma facilidade instalada/aberta. As restrições (FMF4) asseguram que o arco (i, j) apenas estará na solução se a facilidade em j foi instalada. Impede a inclusão na solução, como nodos de Steiner, de localização de facilidades não usadas. As restrições (FMF5) garantem que cada cliente está conectado a uma facilidade aberta. A restrição (FMF6) define o nó raiz. Finalmente, as restrições (FMF7), (FMF8) e (FMF9) são as restrições de integralidade nas variáveis. Este modelo inclui $[|S| \times (|F| - 1)]$ restrições em (FMF1), $[|S| \times (|S| - 1) \times (|F| - 1)]$ restrições em (FMF2), $|C|$ restrições em (FMF3), $|F| - 1$ restrições em (FMF4), $|C| \times |F|$ restrições em (FMF5) e uma restrição em (FMF6). Contém $|V| \times (|V| - 1) + |F| + |S| \times (|S| - 1) \times (|F| - 1)$ variáveis.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo as restrições (FMF7), (FMF8) e (FMF9) por:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{FMF7R})$$

$$0 \leq z_i \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (\text{FMF8R})$$

$$0 \leq g_{ij}^k \leq 1 \quad \forall i, j \in S \quad \forall k \in F \setminus \{r\} \quad (\text{FMF9R})$$

e que designamos por (FMF7R), (FMF8R) e (FMF9R).

Fluxo multiproduto com uma mercadoria por cliente

Nesta formulação vamos também utilizar restrições de multifluxo, mas agora considerando um caminho/fluxo específico para cada cliente. A diferença deste modelo relativamente ao modelo de fluxo multiproduto com uma mercadoria por facilidade está nas restrições (FMF1), restrições de conservação de fluxo. Agora pretendemos que o caminho do fluxo seja efectuado desde a raiz até aos clientes. Vamos considerar adicionalmente as variáveis binárias que estão relacionadas com o fluxo da solução:

$$g_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o fluxo com destino a } k \text{ passa pelo arco } (i,j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall (i,j) \in A \quad \forall k \in C$$

O problema pode ser formulado em programação linear inteira da seguinte forma:

Formulação FMC - Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

$$s. a. \quad \sum_{j \in S, j \neq i, j \neq k} g_{ji}^k - \sum_{j \in V, j \neq i, j \neq r} g_{ij}^k = \begin{cases} 1 & i = k \\ -1 & i = r \\ 0 & i \neq k, r \end{cases} \quad \forall i \in S \quad \forall k \in C \quad (\text{FMC1})$$

$$0 \leq g_{ij}^k \leq x_{ij} \quad \forall (i,j) \in A, \quad i \neq k, \quad \forall k \in C \quad (\text{FMC2})$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{FMC3})$$

$$\sum_{i \in S, i \neq j} x_{ij} = z_j \quad \forall j \in F \setminus \{r\} \quad (\text{FMC4})$$

$$x_{ij} \leq z_i \quad \forall j \in C \quad \forall i \in F \quad (\text{FMC5})$$

$$z_r = 1 \quad (\text{FMC6})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{FMC7})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{FMC8})$$

$$g_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in S \quad \forall k \in C \quad (\text{FMC9})$$

As restrições e conservação de fluxo (FMC1) garantem que cada cliente k recebe uma unidade de fluxo a partir do nó raiz r e para os restantes nodos garantem que a quantidade de fluxo que entra é igual à quantidade de fluxo que sai desse mesmo nodo. As restrições (FMC2) asseguram que um fluxo é enviado para o cliente k através do arco (i, j) com $i, j \in V$ tal que $i \neq j$, se esse arco está na solução. As restrições (FMC3) asseguram que cada cliente é atribuído a uma facilidade instalada/aberta. As restrições (FMC4) asseguram que o arco (i, j) apenas estará na solução se a facilidade em j foi instalada. Impede a inclusão na solução, como nodos de Steiner, de localização de facilidades não usadas. As restrições (FMC5) garantem que cada cliente está conectado a uma facilidade aberta. A restrição (FMC6) define o nó raiz. Finalmente, as restrições (FMC7), (FMC8) e (FMC9) são as restrições de integralidade nas variáveis. Este modelo inclui $|S| \times |C|$ restrições em (FMC1), $[|V| \times (|V| - 1) \times |C|]$ restrições em (FMC2), $|C|$ restrições em (FMC3), $|F| - 1$ restrições em (FMC4), $|C| \times |F|$ restrições em (FMC5) e uma restrição em (FMC6). Contém $|V| \times (|V| - 1) + |F| + |S| \times (|S| - 1) \times |C|$ variáveis.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo as restrições (FMC7), (FMC8) e (FMC9) por:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{FMC7R})$$

$$0 \leq z_i \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (\text{FMC8R})$$

$$0 \leq g_{ij}^k \leq 1 \quad \forall i,j \in S \quad \forall k \in C \quad (\text{FMC9R})$$

e que designamos por (FMC7R), (FMC8R) e (FMC9R).

5.2. Modelos baseados nas restrições de Miller-Tucker-Zemlin

Nas formulações seguintes as restrições de fluxo irão ser substituídas pelas restrições de eliminação de sub-ciclos da formulação de MTZ. Para definirmos a nova formulação, vamos usar o seguinte conjunto de variáveis:

u_i : indica o nível da árvore na qual o nó i é visitado no decorrer do percurso, desde a raiz até ao nodo i .

MTZ para as facilidades

Nesta formulação vamos utilizar restrições de MTZ, considerando um caminho/fluxo específico para cada facilidade.

O problema pode ser formulado em programação linear inteira mista da seguinte forma:

Formulação MTZF - Restrições de Miller-Tucker-Zemlin para as facilidades

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

$$x_{ij} + u_i - u_j \leq (|S| - 1) * (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in S \text{ tal que } i \neq j \text{ e } j \neq r \quad (\text{MTZF1})$$

$$u_r = 0 \quad (\text{MTZF2})$$

$$u_i \leq |S| - 1 \quad \forall i \in S \quad (\text{MTZF3})$$

$$z_r = 1 \quad (\text{MTZF4})$$

$$\sum_{i \in F, i \neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{MTZF5})$$

$$\sum_{i \in S, i \neq j} x_{ij} = z_j \quad \forall j \in F \setminus \{r\} \quad (\text{MTZF6})$$

$$\sum_{k \in S \setminus \{j, i\}} x_{ki} \geq x_{ij} \quad \forall i, j \in S \text{ tal que } i \neq j \text{ e } i \neq r \quad (\text{MTZF7})$$

$$x_{ij} \leq z_j \quad \forall i \in C, \forall j \in F \quad (\text{MTZF8})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{MTZF9})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{MTZF10})$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in V \quad (\text{MTZF11})$$

As restrições (MTZF1), (MTZF2) e (MTZF3) são as restrições de eliminação de sub-ciclos. A restrição (MTZF4) define o nó raiz. As restrições (MTZF5) asseguram a ligação de um cliente a apenas uma facilidade. As restrições (MTZF6) asseguram que o arco (i, j) apenas estará na solução se a facilidade em j foi instalada. As restrições (MTZF7) impedem a existência de arcos de saída de um nodo se não existirem arcos a entrar nesse nodo. Asseguram, deste modo, uma conectividade aos elementos de S que estão na solução. A restrição (MTZF8) assegura que cada cliente é atribuído a uma facilidade apenas se esta for instalada/aberta. Finalmente, as restrições de integralidade das variáveis são dadas por (MTZF9) e (MTZF10). As restrições (MTZF11) são restrições de não negatividade. Este modelo inclui $|S| \times (|S| - 1)$ restrições em (MTZF1), uma restrição em (MTZF2), $|S|$ restrições em (MTZF3), uma restrição em (MTZF4), $|C|$ restrições em (MTZF5), $|F| - 1$ restrições em (MTZF6), $|S| \times (|S| - 1)$ restrições em (MTZF7) e $|C| \times (|F| - 1)$ restrições em (MTZF8). Contém $|V| \times (|V| - 1) + |F| + |V|$ variáveis.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo as restrições (MTZF8) e (MTZF9) por:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{MTZF8R})$$

$$0 \leq z_i \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (\text{MTZF9R})$$

e que designamos por (MTZF8R) e (MTZF9R).

MTZ para os clientes

Agora vamos utilizar restrições de MTZ, considerando um caminho/fluxo específico para cada cliente. A diferença relativamente ao anterior está na restrição (MTZF7). Agora pretendemos estabelecer a ligação até ao cliente.

Formulação MTZC - Restrições de Miller-Tucker-Zemlin para os clientes

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i z_i$$

$$x_{ij} + u_i - u_j \leq |S| * (1 - x_{ij}) \quad \forall (i,j) \in A, \quad j \neq r \quad (\text{MTZC1})$$

$$u_r = 0 \quad (\text{MTZC2})$$

$$u_i \leq |S| \quad \forall i \in V \quad (\text{MTZC3})$$

$$z_r = 1 \quad (\text{MTZC4})$$

$$\sum_{i \in F, i \neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (\text{MTZC5})$$

$$\sum_{i \in S, j \neq i} x_{ij} = z_j \quad \forall j \in F \setminus \{r\} \quad (\text{MTZC6})$$

$$\sum_{k \in S \setminus \{i\}} x_{ki} \geq x_{ij} \quad \forall i \in F \setminus \{r\}, \quad \forall j \in C \quad (\text{MTZC7})$$

$$\sum_{k \in S \setminus \{j,i\}} x_{ki} \geq x_{ij} \quad \forall i, j \in S \text{ tal que } i \neq j \text{ e } i \neq r \quad (\text{MTZC8})$$

$$x_{ij} \leq z_i \quad \forall j \in C, \quad \forall i \in F \quad (\text{MTZC9})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{MTZC10})$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F \quad (\text{MTZC11})$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in V \quad (\text{MTZC12})$$

As restrições (MTZC1), (MTZC2) e (MTZC3) são as de eliminação de sub-ciclos. Notamos que agora em vez de $|V| - 1$ posições podemos substituir por $(|S| - 1) + 1 = |S|$ uma vez que os clientes serão ligados directamente às facilidades. A restrição (MTZF4) define o nó raiz. As restrições (MTZC5) asseguram a ligação de um cliente a apenas uma facilidade. As restrições (MTZC6) asseguram que o arco (i, j) apenas estará na solução se a facilidade em j foi instalada. As restrições (MTZC7) impedem a existência de arcos de saída de um nodo (de uma facilidade para um cliente) se não existirem arcos a entrar nesse nodo (facilidade). As restrições (MTZC8) impedem a existência de arcos de saída de um nodo se não existirem arcos a entrar nesse nodo. Asseguram, deste modo, uma conectividade aos elementos de S que estão na solução. A restrição (MTZC9) indica que se a facilidade j é instalada então a ligação ao cliente i é estabelecida. Finalmente, as restrições de integralidade das variáveis são dadas por (MTZF10) e (MTZF11). As restrições (MTZF12) são restrições de não negatividade. Este modelo inclui $|V| \times (|V| - 1)$ restrições em (MTZF1), uma restrição em (MTZF2), $|V|$ restrições em (MTZF3), uma restrição em (MTZF4), $|C|$ restrições em (MTZF5), $|F| - 1$ restrições em (MTZF6), $|C| \times (|F| - 1)$ restrições em (MTZF7), $|S| \times (|S| - 1)$ restrições em (MTZF8) e $|C| \times (|F| - 1)$ restrições em (MTZF9). Contém $|V| \times (|V| - 1) + |F| + |V|$ variáveis.

Consideramos a relaxação linear deste modelo que se obtém substituindo as restrições (MTZC8) e (MTZC9) por:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{MTZC8R})$$

$$0 \leq z_i \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (\text{MTZC9R})$$

e que designamos por (MTZC8R) e (MTZC9R).

Capítulo 6 - Resultados computacionais

Nesta secção vamos apresentar os resultados computacionais que obtivemos usando os modelos apresentados no Capítulo 5. Para realizar os testes utilizamos um computador Intel Pentium Dual T2390 a 1,86 Ghz com 2 GB de memória e o software de otimização Xpress 7.3. Testamos exemplos simples com custos gerados aleatoriamente e com um número de nós compreendido entre 30 e 120. Por limitações de memória do computador utilizado para obter os resultados computacionais, não foi possível apresentar resultados para valores de $n = 150$ e superiores.

Os valores da matriz de custos de ligação foram gerados aleatoriamente, usando uma distribuição uniforme com valores compreendidos entre 50 e 1500. Os valores dos custos de instalação de facilidades, também gerados aleatoriamente, variam entre 700 e 2000.

Para analisar as soluções obtidas pelas relaxações lineares dos modelos, utilizamos os valores de *gap*. Os valores de *gap* permitem-nos ter uma noção da qualidade das soluções dos modelos e, neste caso, são calculados através da seguinte fórmula: $gap = \frac{otimo - valor}{otimo} \times 100$. O termo *otimo* corresponde ao valor da solução do problema linear inteiro, o *valor* diz respeito ao resultado obtido pela relaxação do modelo correspondente.

Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 nas páginas seguintes. Para cada número de vértices $|V| = 30, 50, 80, 100, 120$ consideramos duas tabelas, uma com os resultados dos testes para todos os modelos e outra tabela com informação sobre os valores médios de *gap* dos vários modelos testados. Para cada valor de $|V|$ a primeira tabela é constituída por duas partes. A primeira parte apresenta os resultados obtidos usando os modelos de Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade e os modelos MTZ para facilidades e respectivas relaxações. A segunda parte apresenta os resultados obtidos usando os modelos de Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente e os modelos MTZ para Clientes e respectivas relaxações. Designamos por FMF o modelo de Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade, MTZF o modelo MTZ para facilidades, FMC o modelo de Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente e MTZC o modelo MTZ para clientes. Para cada um dos

modelos consideramos as respectivas relaxações lineares que serão designadas por FMFR, MTZFR, FMCR e MTZCR.

Cada parte de cada uma destas tabelas é constituída por treze colunas. A primeira coluna de cada parte da tabela indica o número de nodos de Steiner e a segunda o número de possíveis localizações das facilidades a instalar. Notamos que o conjunto de facilidades está contido no conjunto de números dos nós de Steiner. Na terceira coluna encontra-se o número de clientes. Para cada número considerado de facilidades, variamos o número de clientes. A quarta e quinta colunas apresentam respetivamente, o tempo de execução do algoritmo em segundos, denotado por *tempo* e o valor da solução ótima para os modelos de fluxo designado por *otimo*. A sexta, sétima e oitava colunas apresentam respetivamente, o tempo de execução da relaxação dos modelos de fluxo, designado por *tempo*, valor da respectiva solução, designado por *valor*, e o correspondente valor de *gap*, designado por *Gap*. Na nona e na décima coluna, apresentamos os tempos e valores da solução de execução dos modelos de MTZ. A décima primeira, décima segunda e décima terceira colunas apresentam respetivamente, o tempo de execução da relaxação dos modelos de MTZ, o respetivo o valor da solução e o correspondente valor de *gap*.

Para cada instância, apresentamos uma segunda tabela com os valores médios do gap de cada modelo. Na primeira coluna (FM) para os modelos de fluxo multiproduto e na segunda coluna para os modelos MTZ, sendo que a primeira linha corresponde aos modelos para facilidades e a segunda linha aos modelos para clientes. Para o caso de $|V|=120$, no modelo de FMC não obtivemos alguns resultados, uma vez que o tempo de execução foi muito longo. Para o cálculo da média do *gap*, em todos os modelos só consideramos o número de soluções obtidas no modelo de FMC.

Vamos agora analisar alguns dos resultados obtidos, tendo em conta o número de nós utilizados. Começamos por 30 nós e vamos variando a quantidade de facilidades a serem instaladas e o número de clientes a servir. De seguida aplicamos o mesmo processo para 50, 80, 100 e 120 nós.

Tabela 1 - Resultados para 30 nós

30 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMF		FMFR			MTZF		MTZFR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
10	5	20	0,062	12829	0,172	12829	0,00	0,390	12829	0,015	12796,5	0,25
15	5	15	0,031	10078	0,032	10078	0,00	1,201	10078	0,015	9937	1,40
20	5	10	0,078	8206	0,031	8206	0,00	0,374	8206	0,015	7990	2,63
25	5	5	0,125	6292	0,047	6292	0,00	0,671	6292	0,031	6014	4,42
15	10	15	0,125	9891	0,047	9891	0,00	0,078	9891	0,016	9762,25	1,30
20	10	10	0,593	7917	0,062	7660	3,25	0,624	7917	0,015	7621,67	3,73
25	15	5	2,715	4363	0,219	3978,5	8,81	4,134	4363	0,047	3652,71	16,28
30 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMC		FMCR			MTZC		MTZCR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
10	5	20	0,842	12829	0,156	12829	0,00	0,047	12829	0,016	12796,5	0,25
15	5	15	0,718	10078	0,202	10078	0,00	0,125	10078	0,015	9937	1,40
20	5	10	0,546	8206	0,172	8206	0,00	0,437	8206	0,015	7990	2,63
25	5	5	0,593	6292	0,156	6292	0,00	0,608	6292	0,031	6014	4,42
15	10	15	0,905	9891	0,187	9891	0,00	0,109	9891	0,016	9762,25	1,30
20	10	10	0,561	7917	0,25	7917	0,00	0,64	7917	0,015	7621,67	3,73
25	15	5	0,78	4363	0,343	4363	0,00	6,287	4363	0,031	3652,71	16,28

Tabela 2 – Valores médios de *gap* para 30 nós

	FM	MTZ
facilidades	1,72	4,29
clientes	0,00	4,29

Tabela 3 - Resultados para 50 nós

50 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMF		FMFR			MTZF		MTZFR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
10	5	40	0,063	19938	0,015	19896,5	0,21	0,063	19938	0,016	19884,5	0,27
15	5	35	0,156	18081	0,031	17986	0,53	0,39	18081	0,016	17905	0,97
20	5	30	0,156	15435	0,063	15385	0,32	0,25	15435	0,031	15280,4	1,00
25	5	25	0,219	13430	0,062	13430	0,00	0,842	13430	0,031	13257	1,29
30	5	20	0,59	11672	0,35	11643	0,25	0,71	11672	0,05	11562,5	0,94
35	5	15	0,57	10079	0,33	10079	0,00	1,58	10079	0,1	9927,8	1,50
40	5	10	0,34	7041	0,17	7041	0,00	1183	7041	0,15	6985,28	0,79
15	10	35	3152	16861	0,062	16508	2,09	0,764	16861	0,031	16439,5	2,50
20	10	30	2652	14665	0,218	14361	2,07	0,733	14665	0,031	14336	2,24
25	10	25	0,203	12020	0,094	12020	0,00	0,64	12020	0,047	11834	1,55
30	10	20	3744	10943	0,624	10720,5	2,03	1732	10943	0,063	10617,3	2,98
35	10	15	1654	9016	0,671	8934	0,91	1794	9016	0,078	8820,88	2,16
20	15	30	7,27	14595	0,219	14194	2,75	4852	14595	0,031	14155,3	3,01
25	15	25	2527	12178	0,327	12019,5	1,30	2402	12178	0,032	11978,4	1,64
30	15	20	10406	10947	0,421	10519,7	3,90	3151	10947	0,062	10433,5	4,69
25	20	25	13,65	12178	0,593	11789,6	3,19	3026	12178	0,047	11737,9	3,61
30	20	20	29178	10887	1,02	10302,3	5,37	5448	10887	0,07	10300	5,39
50 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMC		FMCR			MTZC		MTZCR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
10	5	40	1856	19938	0,702	19938	0,00	0,078	19938	0,016	19884,5	0,27
15	5	35	5163	18081	1233	18081	0,00	0,436	18081	0,031	17905	0,97
20	5	30	7,41	15435	2074	15435	0,00	0,218	15435	0,046	15280,4	1,00
25	5	25	6209	13430	1513	13430	0,00	1045	13430	0,047	13257	1,29
30	5	20	9357	11672	2,47	11672	0,00	4,87	11672	0,06	11562,5	0,94
35	5	15	10378	10079	2,92	10079	0,00	1,68	10079	0,09	9927,8	1,50
40	5	10	3,11	7041	1693	7041	0,00	2,05	7041	0,12	6985,28	0,79
15	10	35	11654	16861	2137	16814,5	0,28	1092	16861	0,031	16439,5	2,50
20	10	30	23353	14665	3759	14596	0,47	0,733	14665	0,047	14336	2,24
25	10	25	6568	12020	1,56	12020	0,00	0,484	12020	0,046	11834	1,55
30	10	20	29859	10943	11918	10851,3	0,84	1732	10943	0,093	10617,3	2,98
35	10	15	18158	9016	7691	9016	0,00	2434	9016	0,093	8820,88	2,16
20	15	30	17862	14595	6006	14595	0,00	5086	14595	0,062	14155,3	3,01
25	15	25	6755	12178	1778	12178	0,00	2231	12178	0,062	11978,4	1,64
30	15	20	47252	10947	14632	10716	2,11	4415	10947	0,078	10433,5	4,69
25	20	25	30529	12178	12215	12178	0,00	4383	12178	0,078	11737,9	3,61
30	20	20	120402	10887	29243	10632,5	2,34	6028	10887	0,1	10300	5,39

Tabela 4 - Valores médios de gap para 50 nós

	FM	MTZ
facilidades	1,47	2,15
clientes	0,35	2,15

Tabela 5 - Resultados para 80 nós

80 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMF		FMFR			MTZF		MTZFR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
10	10	70	1974	24426	0,06	24241	0,76	0,33	24426	0,03	24083,9	1,40
20	10	60	0,596	22006	0,23	21907	0,45	0,486	22006	0,04	21907	0,45
30	10	50	1,79	18858	0,494	18744,5	0,60	0,502	18858	0,06	18725	0,71
40	10	40	2264	15283	0,704	15283	0,00	0,467	15283	0,134	15283	0,00
50	10	30	5603	13249	3152	13249	0,00	1004	13249	0,2	13206	0,32
60	10	20	5417	9823	1,23	9823	0,00	1694	9823	0,35	9798,5	0,25
70	10	10	9527	7142	7514	7142	0,00	2872	7142	0,57	7117,5	0,34
20	20	60	4666	20349	0,26	20200,9	0,73	0,83	20349	0,05	20196,4	0,75
30	20	50	1712	17812	0,53	17812	0,00	0,22	17812	0,09	17812	0,00
40	20	40	5077	15212	1776	15212	0,00	0,512	15212	0,12	15198,7	0,09
50	20	30	22788	13110	7712	13086	0,18	1546	13110	0,284	13060,8	0,38
60	20	20	10885	9364	7642	9364	0,00	2354	9364	0,35	9266	1,05
30	30	50	2513	16459	0,96	16459	0,00	0,22	16459	0,09	16459	0,00
40	30	40	16907	14464	12048	14460,3	0,03	0,672	14464	0,15	14446,7	0,12
50	30	30	129895	12515	33816	12401,6	0,91	1926	12515	0,295	12381,8	1,06
40	40	40	37765	13960	4018	13799,3	1,15	1156	13960	0,18	13799,3	1,15
50	40	30	253713	11950	33496	11840	0,92	1321	11950	0,27	11831,8	0,99
80 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMC		FMCR			MTZC		MTZCR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
10	10	70	14328	24426	3154	24426	0,00	0,47	24426	0,07	24083,9	1,40
20	10	60	39412	22006	10524	22006	0,00	0,638	22006	0,08	21907	0,45
30	10	50	78832	18858	15328	18798	0,32	0,512	18858	0,11	18725	0,71
40	10	40	51855	15283	8693	15283	0,00	0,581	15283	0,168	15283	0,00
50	10	30	63429	13249	11666	13249	0,00	1,16	13249	0,24	13206	0,32
60	10	20	28613	9823	7,38	9823	0,00	1772	9823	0,37	9798,5	0,25
70	10	10	24059	7142	7318	7142	0,00	2982	7142	0,6	7117,5	0,34
20	20	60	68788	20349	20896	20349	0,00	0,632	20349	0,12	20196,4	0,75
30	20	50	44,9	17812	13044	17812	0,00	0,387	17812	0,16	17812	0,00
40	20	40	122642	15212	41452	15212	0,00	0,722	15212	0,21	15198,7	0,09
50	20	30	134236	13110	5645,62	13110	0,00	2607	13110	0,363	13060,8	0,38
60	20	20	85354	9364	22608	9364	0,00	2376	9364	0,41	9266	1,05
30	30	50	114675	16459	25208	16459	0,00	0,486	16459	0,22	16459	0,00
40	30	40	255772	14464	79699	14464	0,00	0,998	14464	0,28	14446,7	0,12
50	30	30	1046,14	12515	648914	12508,4	0,05	2,37	12515	0,37	12381,8	1,06
40	40	40	249801	13960	79633	13960	0,00	1552	13960	0,312	13799,3	1,15
50	40	30	634273	11950	138467	11874,5	0,63	2094	11950	0,43	11831,8	0,99

Tabela 6 - Valores médios de *gap* para 80 nós

	FM	MTZ
facilidades	0,34	0,53
clientes	0,06	0,53

Tabela 7 - Resultados para 100 nós

100 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMF		FMFR			MTZF		MTZFR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
20	10	80	2,45	28027	0,171	27962	0,23	0,437	28027	0,032	27915,3	0,40
30	10	70	10848	25210	0,546	24895,5	1,25	1139	25210	0,078	24884,3	1,29
40	10	60	4,95	22935	0,858	22880	0,24	0,64	22935	0,125	22857	0,34
50	10	50	66815	20031	6146	19727,3	1,52	5632	20031	0,219	19698,9	1,66
60	10	40	93,07	17120	2355	16674	2,61	14258	17120	0,359	16647	2,76
70	10	30	101915	14202	11341	14116,7	0,60	9641	14202	0,546	14074,7	0,90
20	20	80	20249	26885	0,344	25518,8	5,08	6864	26885	0,062	25518,8	5,08
30	20	70	39031	23197	1,81	22556,3	2,76	7846	23197	0,094	22499,5	3,01
40	20	60	46395	20875	2199	20435,3	2,11	6677	20875	0,141	20333	2,60
50	20	50	37097	17870	7504	17724	0,82	4025	17870	0,25	17563	1,72
60	20	40	123178	15408	46597	15334,4	0,48	23322	15408	0,39	15215,5	1,25
70	20	30	1663,36	13415	110413	13042,5	2,78	26582	13415	0,65	13004,1	3,06
60	50	40	1313,14	13019	234558	12894,3	0,96	19027	13019	0,592	12838,6	1,39
100 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMC		FMCR			MTZC		MTZCR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
20	10	80	55224	28027	12402	28027	0,00	0,734	28027	0,109	27915,3	0,40
30	10	70	464039	25210	241114	25210	0,00	0,874	25210	0,156	24884,3	1,29
40	10	60	370329	22935	225966	22935	0,00	0,827	22935	0,187	22857	0,34
50	10	50	5098,74	20031	1180,6	19828	1,01	3494	20031	0,296	19698,9	1,66
60	10	40	8412,3	17120	2890,14	16917	1,19	17145	17120	0,422	16647	2,76
70	10	30	2035,4	14202	1149,86	14202	0,00	10078	14202	0,64	14074,7	0,90
20	20	80	1790,88	26885	140977	26254,4	2,35	9813	26885	0,156	25518,8	5,08
30	20	70	2931,62	23197	485816	23007,2	0,82	6723	23197	0,219	22499,5	3,01
40	20	60	1885,89	20875	615624	20600,3	1,32	9438	20875	0,25	20333	2,60
50	20	50	1808,31	17870	563114	17806,5	0,36	12324	17870	0,359	17563	1,72
60	20	40	2219,25	15408	1252,07	15408	0,00	16115	15408	0,5	15215,5	1,25
70	20	30	19623,6	13415	2803,75	13211	1,52	15444	13415	0,84	13004,1	3,06
60	50	40	750101	13019	382489	13019	0,00	17,27	13019	0,892	12838,6	1,39

Tabela 8 - Valores médios de *gap* para 100 nós

	FM	MTZ
facilidades	1,65	1,96
clientes	0,66	1,96

Tabela 9 - Resultados para 120 nós

120 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMF		FMFR			MTZF		MTZFR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
50	10	70	7224	25864	3541	25864	0,00	2231	25864	0,25	25789,5	0,29
70	10	50	89497	21003	65879	20865,3	0,66	10873	21003	0,609	20788,9	1,02
50	20	70	51,73	23324	7472	22656	2,86	16208	23324	0,265	22614	3,04
60	20	60	242514	21389	20031	20882,7	2,37	36676	21389	0,468	20820,3	2,66
50	30	70	21506,1	22976	56192	21544,5	6,23	44179	22976	0,375	21489,1	6,47
60	30	60	745448	19839	94084	19428,4	2,07	39577	19839	0,499	19387,1	2,28
90	30	30	4074,54	12510	102851	12454,6	0,44	14757	12510	1545	12404,5	0,84
120 nós												
Nós de Steiner/ Facilidades		Clientes	FMC		FMCR			MTZC		MTZCR		
			tempo	otimo	tempo	valor	Gap	tempo	otimo	tempo	valor	Gap
50	10	70	1276,32	25864	734355	25864	0,00	1654	25864	0,359	25789,5	0,29
70	10	50	*	*	6999,39	20957,5		15179	21003	0,718	20788,9	1,02
50	20	70	47337,9	23324	1580,5	23003,2	1,38	13489	23324	0,436	22614	3,04
60	20	60	*	*	6447,49	21127,1		40513	21389	0,67	20820,3	2,66
50	30	70	*	*	4699,91	21900,9		83492	22976	0,655	21489,1	6,47
60	30	60	*	*	5546,58	19719,8		55568	19839	0,889	19387,1	2,28
90	30	30	*	*	1964,23	12510		16,13	12510	1841	12404,5	0,84
* O tempo excedeu os 47337,9 s												

Tabela 10 - Valores médios de *gap* para 120 nós

	FM	MTZ
facilidades	1,43	1,67
clientes	0,69	1,67

Nas tabelas podemos observar o seguinte:

Para $n = 30$, em termos de números de facilidades e clientes utilizados, pode verificar-se que para o mesmo número de clientes, se aumentarmos o número de possíveis localizações de facilidades o custo total diminui. Se aumentarmos o número de clientes para um mesmo número de facilidades, o custo total aumenta.

Em termos de tempo computacional de execução dos vários programas, normalmente com o aumento do número de facilidades observa-se um aumento no tempo de execução de alguns programas.

Quanto aos valores das relaxações verificamos que MTZFR e MTZCR têm os mesmos valores. Relativamente a FMFR, este tem valores piores que FMCR. No conjunto, os modelos MTZ são os piores e o modelo FMCR é o melhor. Podemos dizer que FMCR apesar de apresentar tempos computacionais mais elevados, apresenta os melhores valores da relaxação linear.

Para o caso de 50 nós, constatámos que na maior parte dos casos, com o aumento de nós de Steiner aumenta o tempo de execução em todos os modelos, sendo os modelos FMF e FMC os que apresentam um maior aumento.

Da mesma forma que no caso anterior, com o aumento do número de facilidades aumenta o tempo de execução do programa e diminui o valor da solução. Com a diminuição do número de clientes para um mesmo número de facilidades, observa-se um aumento no tempo de execução dos programas.

Relativamente às relaxações, os comportamentos são semelhantes ao caso de 30 nós. MTZFR e MTZCR continuam a apresentar os mesmos valores. FMCR tem valores melhores que FMFR. Da mesma forma, os modelos MTZ são os piores e o modelo FMCR é o melhor. FMCR apesar de apresentar tempos computacionais mais elevados, apresenta os melhores valores da relaxação linear.

Para $n = 80$, $n = 100$ e $n = 120$ nós, relativamente aos programas dos modelos para facilidades, quando se diminui o número de clientes e mantendo o número de facilidades, normalmente o tempo de execução aumenta e o valor da solução diminui. Relativamente aos programas dos modelos para clientes, verificam-se os mesmos comportamentos. Os

modelos que apresentam os melhores tempos de execução verificam-se nos modelos de MTZFR e MTZCR.

Verifica-se que o tempo de execução para os programas correspondentes aos modelos para as facilidades é sempre inferior do que os programas dos modelos relativos aos clientes. No entanto, os modelos de MTZ apresentam sempre tempos de execução inferiores aos dos modelos de fluxo.

Relativamente às relaxações, os comportamentos são semelhantes aos casos anteriores e, portanto, FMCR apresenta os melhores valores da relaxação linear apesar de apresentar tempos computacionais mais elevados.

Para perceber alguns resultados, podemos fazer uma análise quanto ao número de restrições e de variáveis que cada um dos modelos inclui. O número de restrições do modelo FMF foi sempre inferior ao número de restrições do modelo FMC, uma vez que os testes efectuados foram quase sempre considerados um número de facilidades inferior ou igual ao número de clientes. Apenas para exemplos de $n = 80$ e $n = 100$ se considerou um número de facilidades superior ao número de clientes. Mas, nestes casos, como a diferença entre o número de facilidades e o número de clientes foi pouco significativa, não se verificou alterações quanto aos resultados obtidos. Tendo em conta as diferenças no número de restrições, facilmente se compreende o facto do modelo de FMC ter tempos da execução dos programas muito maiores.

Quanto aos modelos de MTZ, estes apresentam sempre um número inferior de restrições e um número inferior de variáveis relativamente aos modelos de fluxo. Razão pela qual os tempos de execução dos programas dos modelos de MTZ serem sempre inferiores aos dos modelos de fluxo. Por esse motivo, os modelos de MTZ tornam-se vantajosos relativamente aos modelos de fluxo.

Vamos agora analisar a qualidade das soluções obtidas nos vários modelos, comparando os valores de *gap*. Para todas as instâncias pode-se verificar o seguinte:

Relativamente aos modelos FMFR e MTZFR verifica-se que os valores de *gap* para o MTZFR são sempre superiores aos do modelo de FMFR. Isto significa que as soluções do modelo FMFR são de melhor qualidade.

Quanto aos modelos FMCR e MTZCR, os valores de *gap* de FMCR são inferiores aos de MTZCR o que indica que o modelo FMCR fornece soluções cujo valor é de melhor qualidade.

Analisando as tabelas com os cálculos dos valores médios de *gap* para os quatro modelos em estudo, FMFR, MTZFR, FMCR e MTZCR, verifica-se que o valor médio de *gap* é sempre inferior no modelo FMCR em todas as instâncias apresentadas. Facilmente se conclui que o modelo que apresenta melhor qualidade de soluções é o modelo FMCR.

Comparação dos modelos:

Após análise dos resultados, pode-se verificar que em qualquer um dos modelos a variação no número de facilidades ou no número de clientes origina um comportamento semelhante.

Relativamente ao tempo de execução, os modelos de FMC e FMCR são os que apresentam valores mais elevados relativamente aos outros modelos apresentados. Sendo que, a partir dos 50 nós, o modelo de FMC apresenta valores muito superiores aos restantes modelos.

Os modelos para facilidades apresentam sempre valores inferiores de tempos, relativamente aos correspondentes modelos para clientes.

Os modelos de MTZFR e MTZCR são os que correm em tempos muito inferiores aos restantes modelos.

Quanto à qualidade da solução, analisando os valores de *gap* para os quatro modelos, concluímos que o modelo melhor será o modelo FMCR.

Os modelos de MTZ dão-nos uma solução muito mais rapidamente do que os modelos de fluxo, mas por outro lado, podemos estar à procura de um solução melhor independentemente do tempo de execução. Neste caso, escolheria o modelo de FMC como sendo o melhor modelo, uma vez que os valores de *gap* nos indicam que a sua solução apresenta melhor qualidade.

Capítulo 7 - Conclusões

Neste trabalho, apresentamos vários modelos que caracterizam o problema de localização e conexão de facilidades. Descrevemos alguns modelos para o problema de localização de facilidades e alguns modelos para o problema de conexão de facilidades.

Na prática, a escolha de localizações para a instalação de facilidades depende sempre do problema em causa. A preferência de uma localização em detrimento de outra(s) pode depender do retorno esperado ou do custo associado à localização. Assim, a decisão de localização é influenciada por diversos fatores. Um dos fatores é o custo, mas este não garante a escolha da localização “mais económica” pois existem outros fatores que devem também ser considerados. Fatores mais difíceis de serem avaliados como é o caso das vantagens a considerar em determinados locais, por exemplo as infra-estruturas físicas, o desenvolvimento tecnológico ou outras situações que valorizem os locais. Também os acessos às localizações por vezes influenciam a decisão de localização pois, em determinados casos, é preferível ter acessos mais rápidos às localizações mesmo que a um custo mais elevado. Também, por vezes é importante que haja ligação entre as facilidades instaladas. Essa ligação pode ser feita de diversas formas, escolhendo topologias que melhor se adaptam ao problema em causa.

Existem muitos modelos que caracterizam estes problemas. É importante escolher o modelo mais adequado para cada situação.

Os modelos apresentados e testados nesta tese foram os modelos de Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade, Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade relaxado, MTZ para facilidades, MTZ para facilidades relaxado, Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente, Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente relaxado, MTZ para Clientes e MTZ para Clientes relaxado.

Estes modelos foram testados computacionalmente com instâncias de 50, 80, 100 e 120 nós. Para cada caso, variámos o número de instalação de facilidades e o número de clientes a servir. Os valores de *gap* calculados para os quatro modelos, Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Facilidade, MTZ para facilidades, Fluxo multiproduto com uma mercadoria por Cliente e MTZ para Clientes, permite-nos avaliar a qualidade das soluções

obtidas entre os modelos referidos. Após verificação dos resultados, constatamos que o comportamento dos resultados obtidos foi semelhante em todas as instâncias e, portanto, mostram que, dos modelos apresentados, o modelo de MTZ é o mais vantajoso em termos de tempo de execução relativamente a qualquer um dos modelos aqui testados. Quanto à qualidade da solução obtida, o modelo de fluxo multiproduto com uma mercadoria por cliente é o melhor modelo. A escolha do modelo dependerá do problema e do objectivo que se pretenda.

Bibliografia:

- [1] Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R., Yanasse, H. *Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2008.
- [2] Goldberg, M. C, e Luna, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2005.
- [3] Gollowitzer, S. MIP models for (hop-constrained) connected facility location. Master's thesis, Vienna University of Technology, 2009.
- [4] Magnanti T. e Wolsey L. *Optimal Trees*. In M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma, and G.L. Nemhauser, editors, *Network Models*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 7. Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1995.
- [5] Mirchandani P.B. e Francis R.L. *Discrete location theory*. John Wiley and Sons, Inc., New York, second edition, 1990.
- [6] Swamy C. e Kumar A. *Primal-dual algorithms for connected facility location problems*. Algorithmica, 2004.